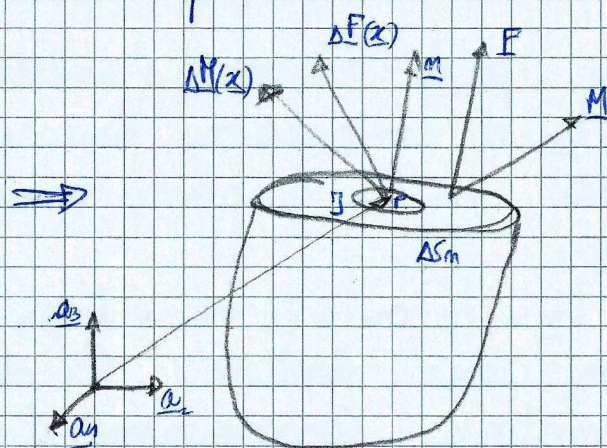
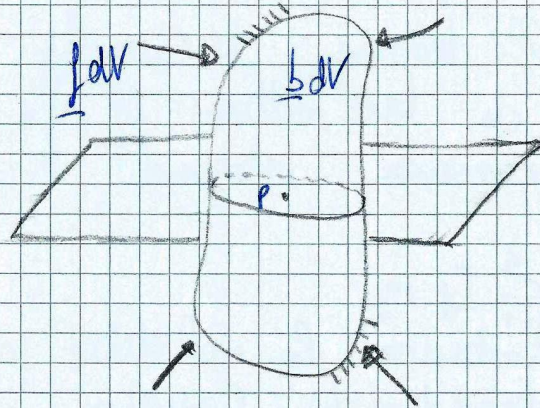


La tensione in un punto

Sempre considerando il continuo di Cauchy, trattiamo la tensione in un punto e nel suo intorno. Immaginiamo di sezionare un continuo con un piano:



Il piano è identificato dalla sua normale $\underline{m}$. Nell'intorno di P agiscono le forze $\Delta \underline{F}$ e i momenti $\Delta \underline{M}$. Sommando tutti gli intorno possibili sulla superficie S_m si ottengono le quantità totali. Si usa l'integrabile:

$$\int_a \Delta \underline{F} d\alpha = \underline{F}$$

$$\int_a \Delta \underline{M} d\alpha = \underline{M}$$

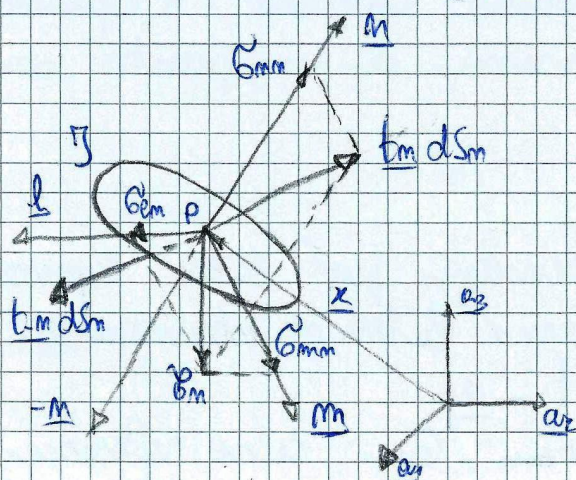
Vediamo due limiti:

$$\lim_{\Delta S_m \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta S_m} := \underline{t_m}(\underline{x})$$

$$\lim_{\Delta S_m \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{M}}{\Delta S_m} = 0$$

Il primo limite dà come risultato la tensione che è un vettore $[\underline{F}]$. Il secondo rappresenta il postulato di Cauchy: puntualmente si trasmettono solo forze non momenti. Il contrario di Cauchy è cioè non polare.

Il vettore tensione dipende dalla posizione $\underline{x}$ rispetto a un riferimento e da $\underline{m}$. Fissato $\underline{x}$ descriviamo $\underline{t_m}$ al variare di $\underline{m}$. Per il Lemma di Cauchy e riferendo $\underline{t_m}$ alla terna intrinseca $(\underline{l}, \underline{m}, \underline{n})$:



$$\underline{t_m} = - \underline{t_{-m}}$$

$$\underline{G_{mm}} = \underline{m} \cdot \underline{t_m} \quad \underline{G_{lm}} = \underline{l} \cdot \underline{t_m} \quad \underline{G_{nm}} = \underline{n} \cdot \underline{t_m}$$

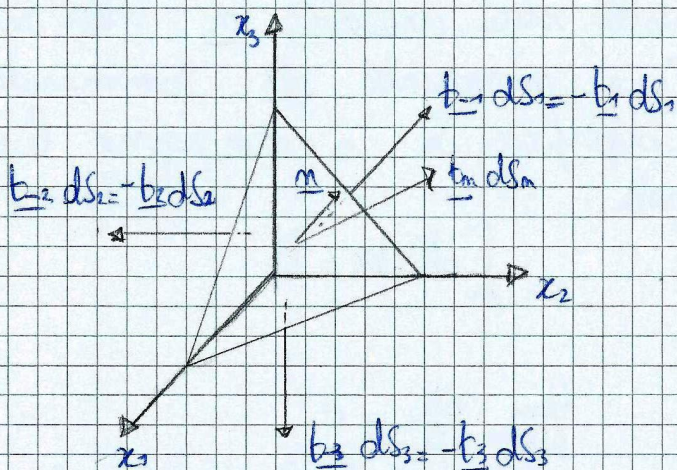
Con G_{mm} tensione normale, G_{lm} e G_{nm} tensioni tangenziali. $\underline{l}$ e $\underline{n}$ sono direzioni, $\underline{m}$ è giacitura. G_{lm} è la tensione diretta secondo $\underline{l}$ su un piano di normale $\underline{m}$ □

Analogamente σ_{mm} è la tensione diretta secondo m su un piano di normale m . Infine, osservando il piano m l, si nota che $\sigma_m = \sqrt{\sigma_{lm}^2 + \sigma_{mm}^2}$. σ_m è la tensione tangenziale massima, ma su tale piano.

Anche per la tensione o valido il teorema di Cauchy: il vettore $\underline{t}_m$ è combinazione lineare di tre vettori $\underline{t}_j$, $j=1,2,3$, agenti su tre giaciture mutuamente ortogonali e di versori $\underline{a}_j$:

$$\underline{t}_m = \underline{t}_1 m_1 + \underline{t}_2 m_2 + \underline{t}_3 m_3 = \sum_{j=1}^3 \underline{t}_j m_j$$

Con m_j coseno direttore. Per dimostrare la validità della sommatoria consideriamo il tetraedro di Cauchy:



$$- \underline{t}_1 dS_1 - \underline{t}_2 dS_2 - \underline{t}_3 dS_3 + \underline{t}_m dS_m + \underline{b} dV = 0$$

$$\frac{dS_m}{dS_m} \underline{t}_m - \underline{t}_1 \frac{dS_1}{dS_m} - \underline{t}_2 \frac{dS_2}{dS_m} - \underline{t}_3 \frac{dS_3}{dS_m} + \underline{b} \frac{dV}{dS_m} = 0$$

Cioè per l'equilibrio. Se $dS_m \rightarrow 0$:

$$\frac{dV}{dS_m} \rightarrow 0 \quad \frac{dS_1}{dS_m} \rightarrow m_1 \quad \frac{dS_2}{dS_m} \rightarrow m_2 \quad \frac{dS_3}{dS_m} \rightarrow m_3$$

Quindi:

$$\underline{t}_m = \underline{t}_1 m_1 + \underline{t}_2 m_2 + \underline{t}_3 m_3 \text{ c.v.d.}$$

Mentre tale formula è valida per l'equilibrio delle forze, la reciproca si basa sull'equilibrio dei momenti:

$$\sum_{j=1}^3 \underline{a}_j \times \underline{t}_j = 0$$

I tre vettori componenti di $\underline{t}_m$ non sono totalmente indipendenti tra loro: devono rispettare la relazione di reciprocità. Se $\underline{a}_j$ lentamente i tre vettori danno 3 componenti, che devono soddisfare le tre equazioni di reciprocità. Avendo 3 equazioni in 9 incognite, gli stati di tensione in un punto sono $\infty^{9-3} = \infty^6$.

Il tensore della tensione

Come la deformazione, anche la tensione può essere espressa mediante un tensore. Consideriamo la terna ortonormale $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$:

$$\underline{t}_m = \sum_{i=1}^3 \underline{t}_{mi} \underline{a}_i$$

Abbreviando invece σ_{lm} , σ_{mm} , σ_{nn} ci si riferisce alle

tensione intrinseca:

$$t_j = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ij} a_j$$

Con σ_{ij} componenti speciali di tensione. Possiamo dunque esprimere il tensore della tensione in tre differenti modi:

VETTORIALE

$$\underline{t_m} = \sum_j t_j m_j$$

OPERATORIALE

$$b_{im} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} m_j$$

MATRICIALE

$$\begin{pmatrix} b_{1m} \\ b_{2m} \\ b_{3m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

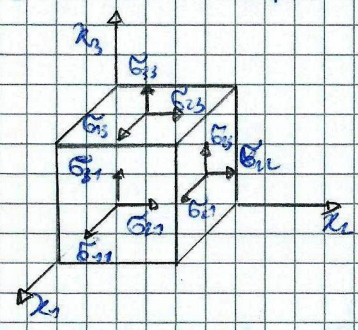
$$\underline{b_m} = \underline{\sigma} \cdot \underline{m}$$

$$\underline{b_m} = \underline{\Pi} \cdot \underline{m}$$

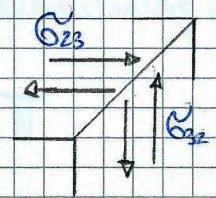
Quindi $\underline{\Pi}$ è la matrice che ha per colonne i tre vettori componenti di $\underline{b_m}$. Fisicamente è il tensore che trasforma $\underline{m}$ in $\underline{b_m}$. Come era accaduto per la deformazione $\underline{\epsilon}$ che $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$: il tensore e quindi le matrici sono simmetriche. Se vogliamo $\underline{b_1}$:

$$\underline{b_1} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{i1} a_i = \sigma_{11} a_1 + \sigma_{12} a_2 + \sigma_{13} a_3$$

Ecco il cubo delle tensioni in un punto:



Per il lemma di Cauchy, le componenti sulle facce opposte sono uguali e opposte.



Per la reciprocità: $\sigma_{mn} = \sigma_{nm}$

Cambiamento di base

Come per la deformazione, traducendo $\underline{\Pi}$ nella base $(\underline{l}, \underline{m}, \underline{n})$:

$$\underline{\Pi} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{l}^T \\ \underline{m}^T \\ \underline{n}^T \end{bmatrix} \underline{\Pi} \begin{bmatrix} \underline{l} & \underline{m} & \underline{n} \end{bmatrix}$$

Ad esempio:

$$\sigma_{lm} = \underline{l} \cdot \underline{b_m} = \underline{l} \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{m} = \underline{l}^T \cdot \underline{\Pi} \cdot \underline{m}$$

Tensioni principali

Anche in questo caso ripercorriamo lo studio fatto per le deformazioni:

$$\underline{\underline{b}}_m = \underline{\underline{\Pi}} \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{\lambda}} \underline{\underline{m}} \Rightarrow (\underline{\underline{\Pi}} - \underline{\underline{\lambda}} \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{0}}$$

In modo geometricamente identico a quanto visto per le deformazioni si perviene a:

$$\underline{\underline{\lambda}}^3 - \underline{\underline{J}}_1 \underline{\underline{\lambda}}^2 - \underline{\underline{J}}_2 \underline{\underline{\lambda}} - \underline{\underline{J}}_3 = 0$$

In cui, come di consueto:

$$- \underline{\underline{J}}_1 = \text{tr } \underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{G}}_{11} + \underline{\underline{G}}_{22} + \underline{\underline{G}}_{33}$$

$$- \underline{\underline{J}}_2 = \begin{vmatrix} \underline{\underline{G}}_{11} & \underline{\underline{G}}_{12} \\ \underline{\underline{G}}_{21} & \underline{\underline{G}}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\underline{G}}_{22} & \underline{\underline{G}}_{23} \\ \underline{\underline{G}}_{32} & \underline{\underline{G}}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\underline{G}}_{11} & \underline{\underline{G}}_{13} \\ \underline{\underline{G}}_{31} & \underline{\underline{G}}_{33} \end{vmatrix}$$

$$- \underline{\underline{J}}_3 = \det \underline{\underline{\Pi}}$$

Risolta l'equazione si ottengono le tre soluzioni $\underline{\underline{\lambda}}_1, \underline{\underline{\lambda}}_2$ e $\underline{\underline{\lambda}}_3$.

Si passa dunque agli autovalori della matrice $(\underline{\underline{\Pi}} - \underline{\underline{\lambda}} \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{G}}_{ij}$,

$\underline{\underline{G}}_{12}$ e $\underline{\underline{G}}_{13}$ e si ottengono infine gli autovettori $\underline{\underline{m}}_I, \underline{\underline{m}}_{II}$ e $\underline{\underline{m}}_{III}$.

Questi ultimi sono definiti a meno di una costante, cioè se $\underline{\underline{m}}_i$ è autovettore lo è pure $\beta \underline{\underline{m}}_i$. Vigge la solita condizione di normalizzazione:

$$\underline{\underline{m}}_I^2 + \underline{\underline{m}}_{II}^2 + \underline{\underline{m}}_{III}^2 = 1$$

La matrice $\underline{\underline{\Pi}}$ principale è:

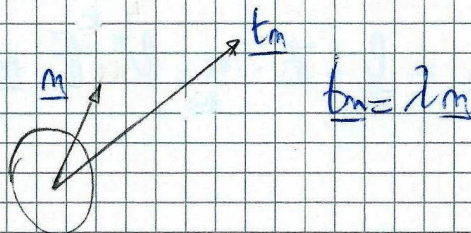
$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{G}}_{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{G}}_{III} \end{bmatrix}$$

Valle la proprietà di estremo nelle tensioni principali:

$$\underline{\underline{G}}_{II} \geq \underline{\underline{G}}_{III} \geq \underline{\underline{G}}_{III}$$

Nel caso di tensioni principali il materiale risulta solo teso o solo compresso lungo le direzioni principali $\underline{\underline{m}}_I, \underline{\underline{m}}_{II}$ e $\underline{\underline{m}}_{III}$.

In definitiva abbiamo cercato quei piani rispetto ai quali la tensione è parallela ai vettori normali dei piani stessi:



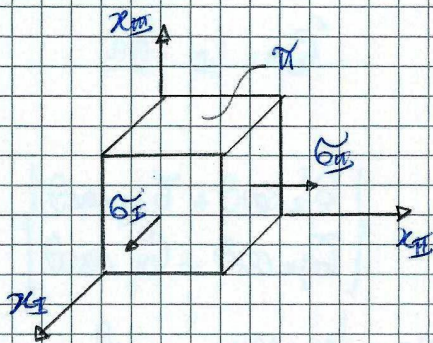
Stato piano di tensione

Uno stato di tensione si definisce piano se, comunque scelto n , il vettore tensione t_n si mantiene parallelo a un piano π detto piano della tensione. Condizione necessaria e sufficiente è dunque che $\text{div } \Pi = 0$, da cui $\dot{\gamma}_3 = \alpha^5$
 $l^3 - \dot{\gamma}_1 l^2 - \dot{\gamma}_2 l = 0$

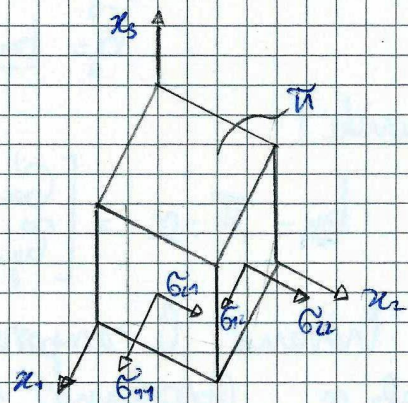
Ne segue che $l=0$ è soluzione dell'equazione. Perciò $\dot{\gamma}_{nn}=0$.
 Basta allora identificare un piano su cui non agisca nessuna componente di tensione e si ottiene uno stato piano di tensione.

Per i riferimenti principale e generico, rispettivamente:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\gamma}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\Pi = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} & 0 \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Le due matrici possono ridursi a:

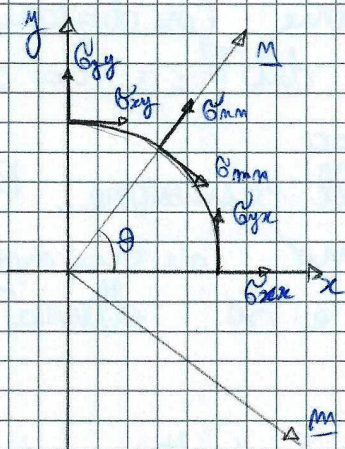
$$\Pi = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{11} & 0 \\ 0 & \dot{\gamma}_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\Pi = \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_{11} & \dot{\gamma}_{12} \\ \dot{\gamma}_{21} & \dot{\gamma}_{22} \end{bmatrix}$$

La circonferenza di Mohr

Possiamo tracciare la circonferenza di Mohr anche per la tensione. Possiamoci sul piano xy :



Ma le tensioni sulle giaciture ortogonali x e y , possiamo ripartire quelle su m e n . Si può scrivere indifferenzientemente:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

σ tensioni normali, τ tensioni tangenziali.

Calcoliamole:

$$\underline{m} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}_m = \Pi \cdot \underline{m}$$

$$\underline{\sigma}_m = \underline{b}_m \cdot \underline{m}$$

$$\underline{\sigma}_{mn} = \underline{b}_m \cdot \underline{n}$$

Quindi:

$$\underline{b}_m = \Pi \cdot \underline{m} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{yx} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{pmatrix}$$

Se troviamo le componenti del vettore tensione sul piano di normale $\underline{m}$. Possiamo ora calcolare σ_m e σ_{mn} :

$$\sigma_m = \underline{m}^T \cdot \underline{b}_m = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{yx} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_x \cos^2\theta + \tau_{xy} \cos\theta \sin\theta + \tau_{yx} \sin\theta \cos\theta + \sigma_y \sin^2\theta$$

$$\sigma_{mn} = \underline{n}^T \cdot \underline{b}_m = (\sin\theta, -\cos\theta) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{yx} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma_x \cos\theta \sin\theta + \tau_{xy} \sin^2\theta - \tau_{yx} \cos^2\theta - \sigma_y \sin\theta \cos\theta$$

Usando le formule trigonometriche $\sin^2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$, $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ e $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{\tau_{xy}}{2} \sin 2\theta + \frac{\tau_{yx}}{2} \sin 2\theta + \frac{\sigma_y}{2} (1 - \cos 2\theta) =$$

$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\begin{aligned}\tau_{nm} &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \tau_{yx} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - \frac{\sigma_y}{2} \sin 2\theta = \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}$$

Portiamo a primo membro i termini noti delle due equazioni ed eleviamo al quadrato:

$$\begin{cases} \left(\sigma_m - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right)^2 \\ (\tau_{nm})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \right)^2 \end{cases}$$

Sommando membro a membro:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_m - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{nm})^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta + (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta \sin 2\theta \\ &\quad + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin^2 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta - (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta \cos 2\theta \\ \Rightarrow \left(\sigma_m - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{nm})^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \end{aligned}$$

Occorre reperire la circonferenza di Mohr per la tensione. Le coordinate dei punti del piano di Mohr sono le tensioni σ_n (normale) e τ_{nm} (tangenziale) sul generico piano di normale n . Centro e raggio del cerchio sono:

$$C \equiv \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Le tensioni principali si possono trovare sommando all'ascissa del centro il raggio (o sottraendolo), oppure calcolando il determinante che $\pi - I \mathbb{I}$ e le sue radici:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \sigma_x - l & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - l \end{vmatrix} &= (\sigma_x - l)(\sigma_y - l) - \tau_{xy}^2 = \\ &= l^2 - (\sigma_x + \sigma_y)l + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow l_{I,II} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \frac{\sigma_y^2}{4} + \frac{\sigma_x \sigma_y}{2} - \sigma_x \sigma_y + \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{I,II} \end{aligned}$$

In effetti sono le stesse coordinate che si otterrebbero usando:
 $\sigma_c = \sigma_c + R$ $\sigma_c = \sigma_c - R$

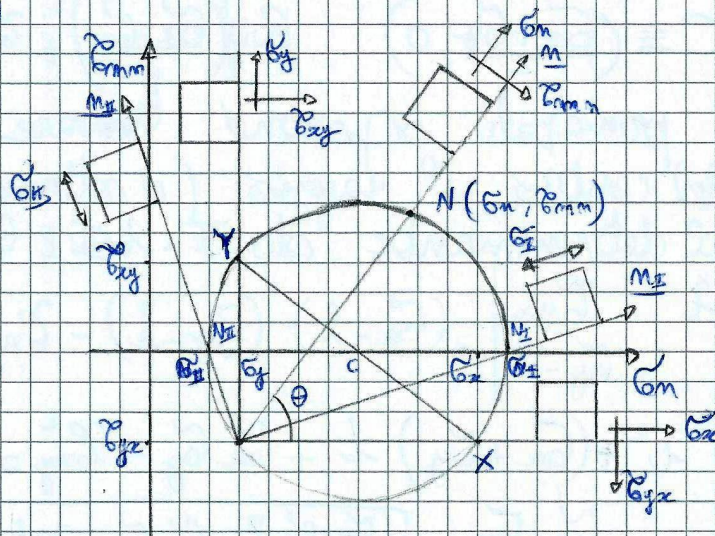
A questo punto possiamo affrontare la costruzione del cerchio di Mohr. Premettiamo ancora che, solo per la costruzione del cerchio, una tensione tangenziale τ_{nm} $\square$

è positiva se genera un momento orario rispetto a P. Quindi $\tau_{xy} > 0$, $\tau_{yx} < 0$. Ecco i passaggi:

- si tracciano sul piano di Mohr i punti:

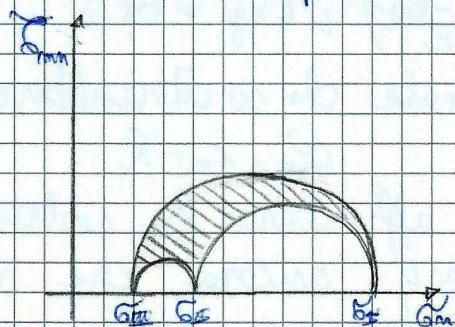
$$X = (\sigma_x, -\tau_{yx}) \quad Y = (\sigma_y, \tau_{xy})$$
- Sono i due punti rappresentativi dello stato di tensione sui piani di normale x e y .
- si uniscono X e Y e si ottiene il centro C della circonferenza come intersezione del segmento congiungente X e Y e l'asse delle ascisse;
- si traccia la circonferenza che ha centro in C e passa per X e Y ;
- si trova il polo D della rappresentazione come intersezione tra la parallela a σ_m passante per X e la parallela a σ_{mn} passante per Y ;
- si traccia una retta per D che formi un angolo θ con la parallela a σ_m e l'asse m . Si individua sulla circonferenza il punto N le cui componenti definiscono lo stato di tensione sulla giacitura di normale m .

Graficamente:



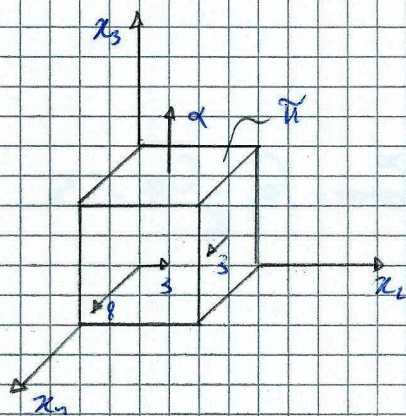
Le tensioni principali hanno, come deve essere, ordinata nulla.

Se abbiamo anche σ_m possiamo usare tre cerchi di Mohr:



L'orbitale di Mohr e la regione tratteggiata e contiene gli stati di tensione ammissibili.

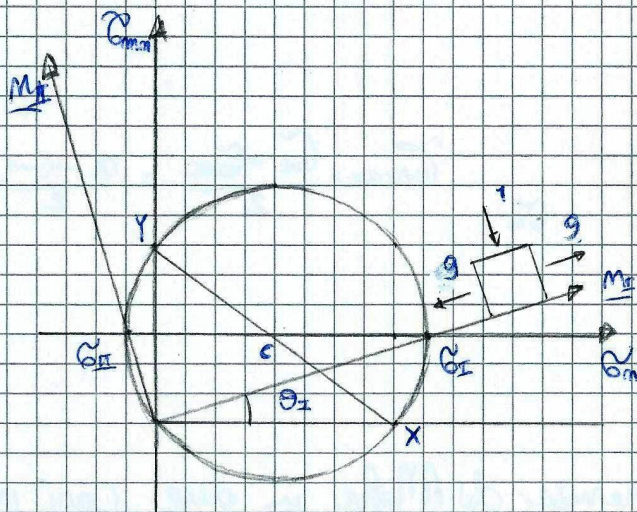
15
Ecco un esercizio che ci aiuta a comprendere le circonferenze di Mohr:



Il tensore delle tensioni è:

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{22} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{33} & \sigma_{33} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

ci agisce lungo la normale, quindi il piano π è principale d'azione. Lo stato di tensione non è piano, ma la presenza di un'unica componente nella tensori riga e tensori colonne di $\mathbb{T}$ permette l'uso del cerchio di Mohr sul piano x_1, x_2 :



$$X = (8, -3) \quad Y = (0, 3)$$

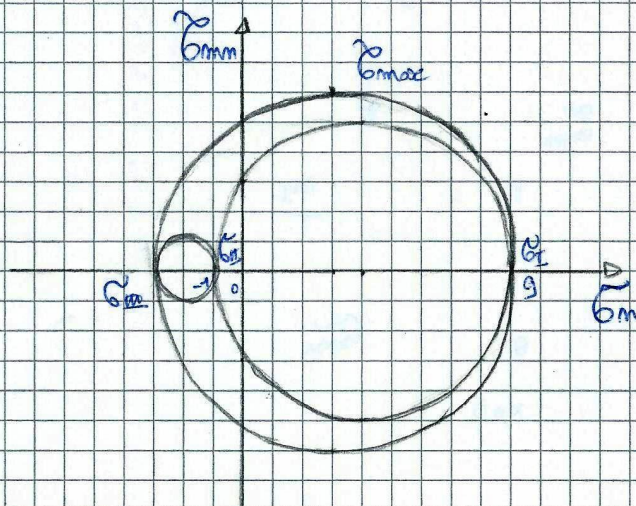
$$C = (4, 0) \quad R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\sigma_I = x_c + R = 9$$

$$\sigma_{II} = x_c - R = -1$$

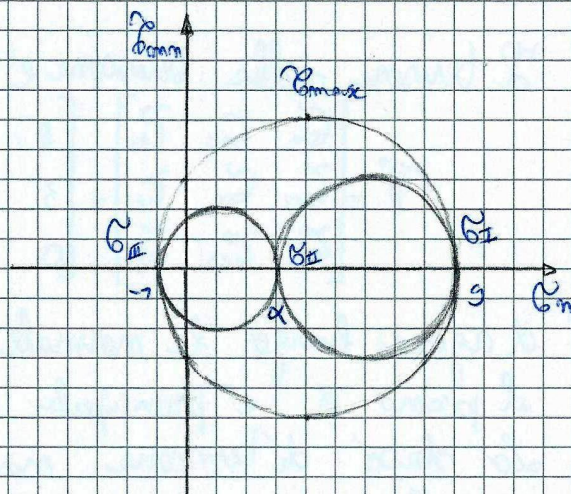
A questo punto cerchiamo la tensione tangenziale massima. Limitandoci al piano la tensione tangenziale massima è $\tau_{max} = R = 5$. Non dobbiamo però dimenticare α ! Per l'angolo, variabile al variare di α :

$$\alpha < -1 = \sigma_{II}:$$



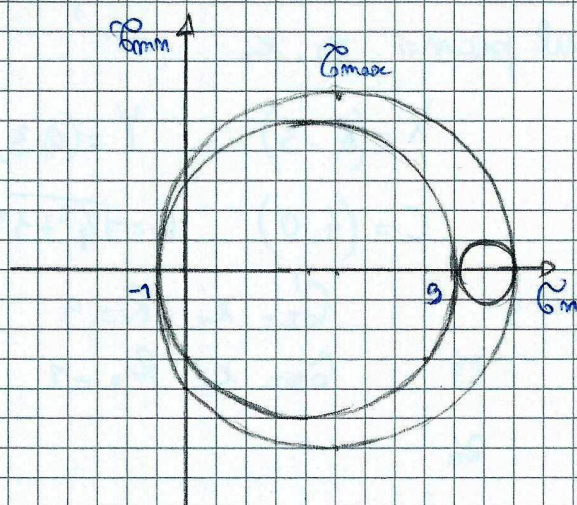
$$\tau_{max} = R = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = \frac{9 - (-1)}{2}$$

- $-1 < \alpha < 9$:



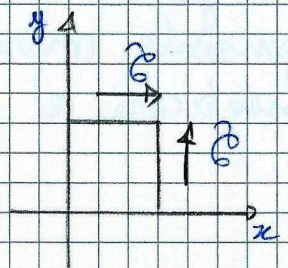
$$G_{mmax} = \frac{G_I - G_{II}}{2} = 5$$

- $\alpha > 9 = G_I$:



$$G_{mmax} = \frac{G_I - G_{II}}{2} = \frac{\alpha - (-1)}{2} = \frac{\alpha + 1}{2}$$

Ora analizziamo le circonferenze di Mohr in due casi particolari:
- pure torsione tangenziale:



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = (0, -\tau)$$

$$Y = (0, \tau)$$

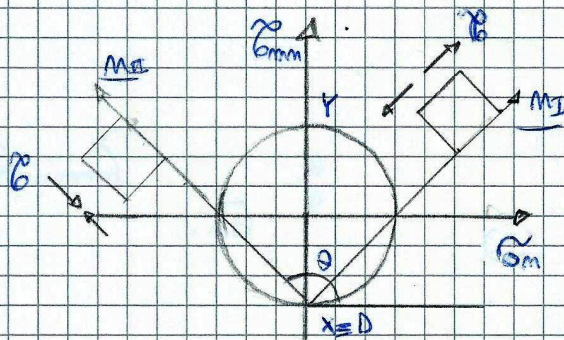
$$C = (0, 0)$$

$$R = \tau$$

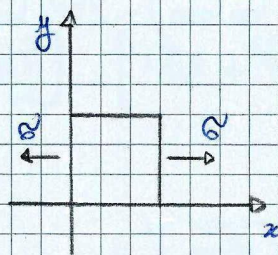
$$G_I = \tau$$

$$G_{II} = -\tau$$

Quindi:



- pura trazione:



$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

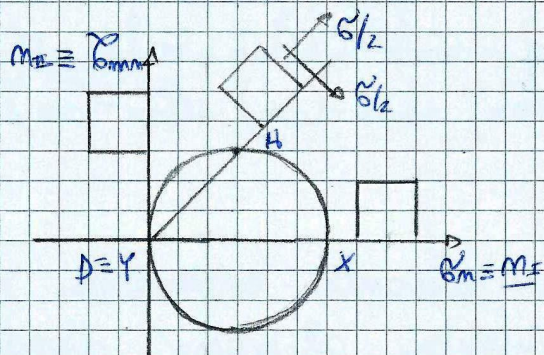
$$X = (\sigma, 0)$$

$$Y = (0, 0)$$

$$C = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{\sigma}{2}$$

Quindi:



$$H = \left(\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2} \right)$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma}{2}$$

La tensione tangenziale massima è lungo le diagonali del quadrato.

Tensione media nel punto

Parliamo del tensore della tensione e definiamo Θ (tensione media, scala):

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \Theta = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbb{T} = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \frac{1}{3} \int_1$$

Possiamo dunque decomporre $\mathbb{T}$ in modo molto semplice: una parte $\Theta \mathbb{I}$ e un'altra $\mathbb{T}'$, che sarà banalmente $\mathbb{T} - \Theta \mathbb{I}$.

Matricialmente:

$$\mathbb{T} = \Theta \mathbb{I} + \mathbb{T}'$$

$$\mathbb{T} = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \Theta & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \Theta & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \Theta \end{bmatrix}$$

$\Theta \mathbb{I}$: tensore idrostatico
 $\mathbb{T}'$: tensore deviatorico

Si può dimostrare che $\sigma'_\alpha = \sigma_\alpha - \Theta$, $\alpha = I, II, III$. Ci riferiamo agli autovalori σ_α di $\mathbb{T}$ e σ'_α di $\mathbb{T}'$.

Esiste un legame tra $\mathbb{T}$ e $\mathbb{T}'$: quindi è possibile esprimere gli invarianti di $\mathbb{T}'$ attraverso i σ_α di $\mathbb{T}$. Abbiamo infatti, per J_1 e J_2 :

$$J_1 = \sigma'_I + \sigma'_{II} + \sigma'_{III} = \sigma_I - \Theta + \sigma_{II} - \Theta + \sigma_{III} - \Theta = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3\Theta = 3\Theta - 3\Theta = 0;$$

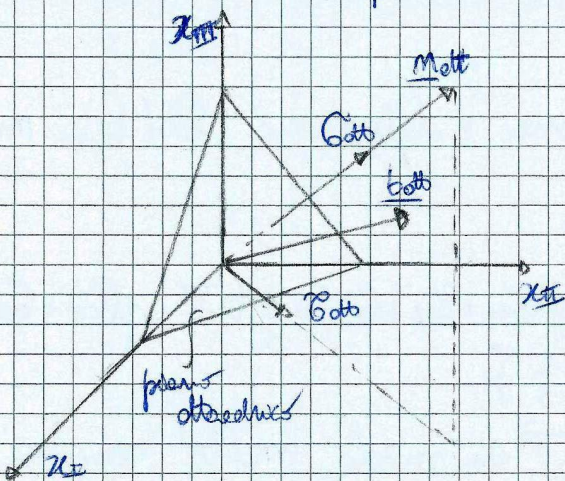
$$- J_2' = -(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III}) = -[(\sigma_I - \Theta)(\sigma_{II} - \Theta) + (\sigma_I - \Theta)(\sigma_{III} - \Theta) + (\sigma_{II} - \Theta)(\sigma_{III} - \Theta)] = -[(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) - 2\Theta(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) + 3\Theta^2] = -(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) - 6\Theta^2 + 3\Theta^2 = -[(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III}) - 3\Theta^2] = J_2 + \frac{J_1^2}{3}$$

Possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned} J_2' &= -\sigma_I \sigma_{II} - \sigma_I \sigma_{III} - \sigma_{II} \sigma_{III} + \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 = \\ &= \frac{1}{3}\sigma_I^2 + \frac{1}{3}\sigma_{II}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{III}^2 + \frac{2}{3}\sigma_I \sigma_{II} + \frac{2}{3}\sigma_I \sigma_{III} + \frac{2}{3}\sigma_{II} \sigma_{III} - \sigma_I \sigma_{II} - \sigma_I \sigma_{III} - \sigma_{II} \sigma_{III} = \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \sigma_{II} - \sigma_I \sigma_{III} - \sigma_{II} \sigma_{III}) = \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2] \end{aligned}$$

La tensione tangenziale massima

È particolarmente rilevante evidenziare un particolare tipo di tensione, quella riferita al piano ottadrico (utile per la resistenza dei materiali duttili). Tale piano ha per normale la bisettrice del primo ottaedro nel riferimento principale:



$$\underline{n}_{oct} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\pi} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{oct} &= \underline{\pi}_{oct} \underline{n}_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se ha, per la tensione normale:

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= \underline{\sigma}_{oct} \cdot \underline{n}_{oct} = \underline{n}_{oct} \cdot \underline{\sigma}_{oct} = \frac{\sqrt{3}}{3} (1, 1, 1) \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) = \\ &= \frac{1}{3} J_1 \end{aligned}$$

Per la tensione tangenziale:

$$\underline{\tau}_{oct} = \underline{\sigma}_{oct} \underline{n}_{oct} + \underline{\tau}_{oct} \underline{n}_{oct} \Rightarrow \underline{\tau}_{oct} = \underline{\sigma}_{oct} \underline{n}_{oct}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= |\underline{\tau}_{oct}| = \sqrt{|\underline{\sigma}_{oct}|^2 - \sigma_{oct}^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{1}{9}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{1}{9}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{2}{9}(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III})} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{9}(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - \frac{2}{9}(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III})} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{9}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 - \frac{2}{3}(\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - 3(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33})} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_1^2 + 3J_2}$$

Ricordando che $J_2' = J_2 + \frac{J_1^2}{3}$:

$$\sigma_{\text{dev}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{J_1^2 + 3J_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{3}{3}} J_2'$$

Completissimamente abbiamo ottenuto:

$$\sigma_{\text{dev}} = \frac{1}{3} J_1$$

$$\sigma_{\text{dev}} = \sqrt{\frac{3}{3}} J_2'$$

Interveniamo che:

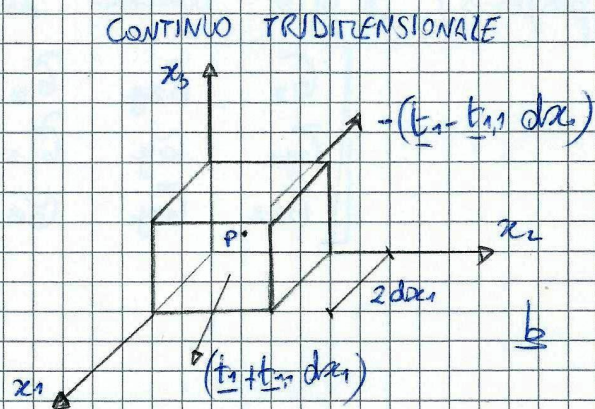
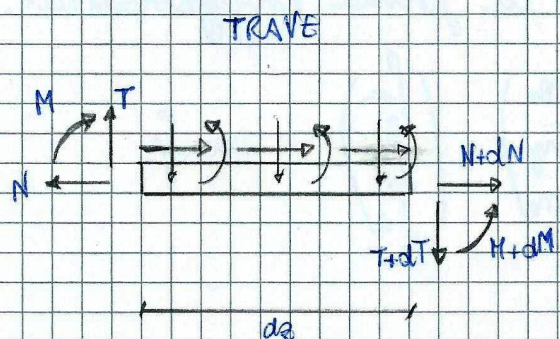
- le componenti σ_{dev} e σ_{vol} di $\underline{\underline{\sigma}}$ sono invarianti;
- σ_{vol} dipende solo dal determinante di tensione e non dal 3° componente idrostatico.

Dal punto all'infinito: le equazioni indefinite di equilibrio

Possiamo ora definire le equazioni indefinite di equilibrio che ci permettono di passare dal punto al suo intorno.

La tensione nel punto $P(x)$ è nota se sono noti i vettori tensione $\underline{\underline{t}}(x)$ su tre piani ortogonali, cioè se è nota $\underline{\underline{T}}$. Le tensioni $\underline{\underline{t}}(x)$ non possono variare arbitrariamente, ma devono soddisfare le equazioni di equilibrio del corpo. Vale il postulato fondamentale: "Un corpo continuo è in equilibrio se e solo se sono soddisfatte le equazioni condizionali della statica per ogni sua porzione".

Per la trave avevamo considerato un continuo monodimensionale, qui ci serve un parallelepipedo:



Il parallelepipedo considerato ha lati paralleli agli assi, lunghi $2dx_i$, ed è centrato in P . Nella trave gli elementi di normale, taglio e momento erano dN , dT e dM .

In questo caso sono $t_{ij} dx_j$. Dove verifichiamo l'equilibrio di tensione e forze di volume:

$$\sum_{j=1}^3 [(t_{ij} + t_{ij} dx_j) dS_j - (t_{ij} - t_{ij} dx_j) dS_j] + b_i dV = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^3 b_{ij} dS_j + b_i dV = \sum_{j=1}^3 (t_{ij} + b_i) dV = 0$$

Da cui le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\sum_{j=1}^3 (t_{ij} + b_i) = 0$$

Sono tre equazioni differenziali che, dato:

$$t_j = \sum_{i=1}^3 G_{ij} q_i$$

$$t_j = (G_{1j}, G_{2j}, G_{3j})^T$$

$$b = \sum_{i=1}^3 b_i q_i$$

si scrivono, in forma scalare:

$$\sum_{j=1}^3 G_{ij} q_j + b_i = 0 \quad i=1,2,3$$

In notazione ingegneristica:

$$\Pi = \begin{bmatrix} G_x & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{xy} & G_y & G_{yz} \\ G_{xz} & G_{yz} & G_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} i=x & \quad \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial G_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \\ i=y & \quad \frac{\partial G_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_{yz}}{\partial z} + b_y = 0 \\ i=z & \quad \frac{\partial G_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial G_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} + b_z = 0 \end{aligned}$$

Per la reciprocità il tensore Π è simmetrico. Ma segue che l'equilibrio alle rotazioni è automaticamente soddisfatto:

$$\sum_{j=1}^3 q_j \times t_j = 0$$

Finora abbiamo parlato di equazioni indefinite di equilibrio. Possiamo adesso concretizzarle per l'equilibrio al contorno. Si deve avere:

$$t_m = f \Rightarrow \Pi n = f, \text{ in forma scalare } \sum_{j=1}^3 G_{ij} m_j = f_i \quad i=1,2,3$$

Tutto ciò sulla superficie S_f . Le tensioni al contorno devono essere uguali alle forze applicate f (forze di m , perforce). Si può anche usare la forma ingegneristica:

$$\begin{bmatrix} G_x & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{xy} & G_y & G_{yz} \\ G_{xz} & G_{yz} & G_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad \text{su } S_f$$

Il problema statico

Maestre le deformazioni riguardano gli spostamenti e permettono la definizione del problema cinematico, le tensioni riguardano le forze e permettono la definizione del problema statico.

Partendo dalla forma indiciale:

possiamo dare una forma operazionale al problema statico:

$$\underline{\underline{G}} := \begin{pmatrix} G_{xx} \\ G_{yy} \\ G_{zz} \\ G_{yx} \\ G_{xz} \\ G_{xy} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{b}} := \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{f}} := \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}^* \cdot \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \\ \mathbb{N} \cdot \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{f}}$$

Ricordando la forma scalare:

$$\begin{cases} G_{xx,x} + G_{xy,y} + G_{xz,z} + b_x = 0 \\ G_{yx,x} + G_{yy,y} + G_{yz,z} + b_y = 0 \\ G_{zx,x} + G_{zy,y} + G_{zz,z} + b_z = 0 \end{cases}$$

Si può scrivere l'operatore $\mathbb{D}^*$:

$$\mathbb{D}^* = \begin{bmatrix} -D_x & 0 & 0 & 0 & D_z & -D_y \\ 0 & -D_y & 0 & -D_z & 0 & -D_x \\ 0 & 0 & -D_z & -D_y & -D_x & 0 \end{bmatrix}$$

Come per il corpo rigido vale la dualità $A = B^T$, così ora si rappresenta tra $\mathbb{D}$ e $\mathbb{D}^*$.

In S_f :

$$\begin{cases} G_{xx} m_x + G_{xy} m_y + G_{xz} m_z = f_x \\ G_{yx} m_x + G_{yy} m_y + G_{yz} m_z = f_y \\ G_{zx} m_x + G_{zy} m_y + G_{zz} m_z = f_z \end{cases}$$

Quindi $\mathbb{N}$ è:

$$\mathbb{N} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & m_z & m_y \\ 0 & m_y & 0 & m_z & 0 & m_x \\ 0 & 0 & m_z & m_y & m_x & 0 \end{bmatrix}$$

Nel caso delle brave avremo solo tre componenti:

$$\underline{\sigma} := \begin{pmatrix} N \\ T \\ M \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{pmatrix}$$

Il problema diretto risulta quindi descritto dalle due equazioni:

$$\mathbb{D}^* \cdot \underline{\sigma} + \underline{b} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -D_x & 0 & 0 & 0 & -D_z & -D_y \\ 0 & -D_y & 0 & -D_z & 0 & -D_x \\ 0 & 0 & -D_z & -D_y & -D_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{IV } \underline{\sigma} = \underline{f} \Rightarrow \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & m_z & m_y \\ 0 & m_y & 0 & m_z & 0 & m_x \\ 0 & 0 & m_z & m_y & m_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Si hanno dunque tre equazioni in sei incognite. Il caso diretto è, come al solito, risolvibile (date le forze $\underline{f}$, $\underline{b}$ si determinano le tensioni $\underline{\sigma}$ che lo equilibrano). Quello indiretto si risolve invece a rischio (date le tensioni $\underline{\sigma}$ si determinano i campi $\underline{f}$ e $\underline{b}$ delle forze). Nel caso diretto il sistema è localmente stabi-
mente indeterminato: il sistema è iperstabile. Nel caso delle
brave l'operatore $\mathbb{D}^*$ $5(3 \times 3)$ è risulta iperstabile solo se non
si hanno abbastanza condizioni al contorno. Nel caso generale
il sistema è iperstabile per natura e non può essere risolto.
Già dal punto di vista interno i vincoli sono iperstabili, man-
tre internamente la brave era sempre isostatica.

Se $\underline{\sigma}$ è sufficientemente regolare il problema inverso si risolve

Corso sul metodo delle tensioni

Il problema è $\mathbb{D}^* \underline{\sigma} = \underline{b}$, indeterminato. Si ha $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{om} + \underline{\sigma}_{pert}$:

$$\mathbb{D}^* \underline{\sigma}_{pert} = \underline{b} \quad \mathbb{D}^* \underline{\sigma}_{om} = 0$$

Si pongono $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{pert}$ e $\underline{\sigma}_{om} = \underline{\sigma}_x$. Queste ultime sono
le autotensioni, cioè le tensioni equilibrate da forze di indu-
zione nulle. Si scrive:

$$\underline{\sigma}_x = \underline{S} \underline{X} \quad \text{al posto dell'integrazione dell'equazione}$$

Anziché integrare rispetto all'operatore S e le funzioni di tensione $\underline{X}$. Sono funzioni "quasi pronte", sufficientemente regolari e soddisfacenti le equazioni di equilibrio omogenee rappresentando la generalizzazione al continuo delle travi iperstatiche.

S deve essere tale che:

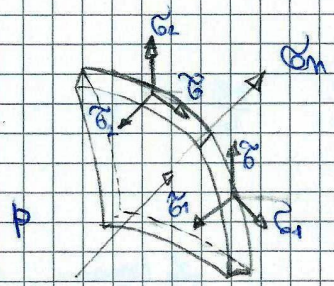
$$D^* \cdot S \underline{X} = 0 \quad \forall \underline{X} \Rightarrow D^* S = 0$$
$$\Rightarrow \underline{G} = \underline{G}_0 + S \underline{X}$$

Con S operatore di autotensione e $\underline{X}$, come già detto, funzioni di tensione (iperstatiche diffuse sul dominio).

In generale il problema è staticamente indeterminato e cinematicamente impossibile.

Soluzioni approssimate per corpi sottili

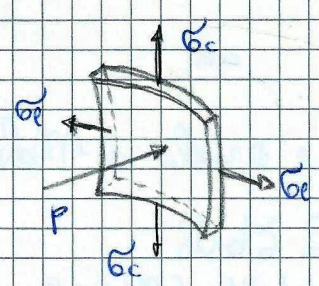
Uniamo quanto studiato in due casi particolari, entrambi relativi al corpo sottile. In generale il problema statico è indeterminato. Tuttavia, con opportune semplificazioni esistono casi in cui il problema è risolvibile. Il corpo sottile non presenta effetti di bordo:



$$G_1 = G_2 \cong 0$$
$$G_m = -p$$

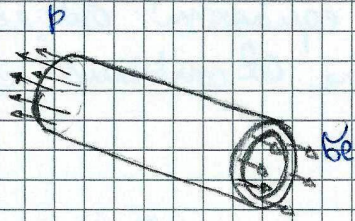
Si hanno solo forze normali alla superficie S_p , nulla quella tangenziale, quindi sono $G_1 = G_2 \cong 0$

Ecco due casi che presentano ulteriori simmetrie:
- tubi con pressione interna;



La simmetria radiale del sistema impedisce la presenza delle tensioni G , che squilibrerebbero la struttura interna del tubo. Rimangono solo le tensioni circonferenziali e longitudinali, costanti sulla sezione.

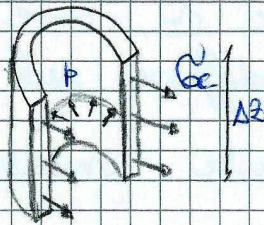
L'equilibrio nella direzione longitudinale tra una sezione longitudinale e una generata impone:



$$Ge \cdot 2\pi R \Delta s = p \pi R^2 \Delta s$$

$$\Rightarrow Ge = \frac{pR}{2b}$$

L'equilibrio in direzione normale dà:



$$2 Ge b \Delta s = p 2R \Delta s$$

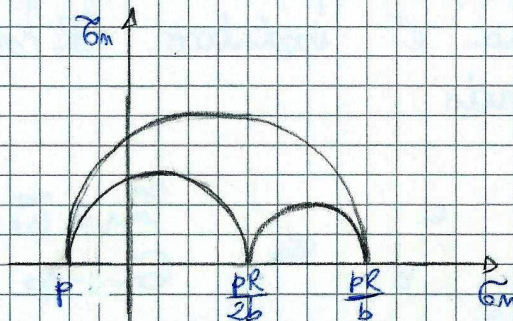
$$\Rightarrow Ge = \frac{pR}{b} \quad (\text{formula di Morin})$$

$2R \Delta s$ è la proiezione della superficie di curva sul diametro.

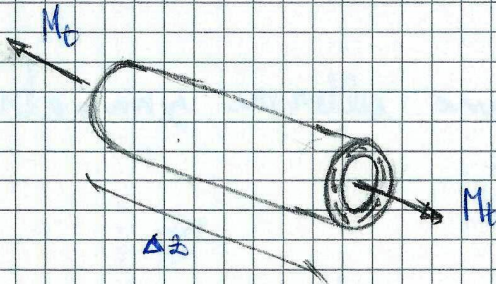
Abbiamo le tre tensioni principali:

$$\sigma_z = \sigma_c = \frac{pR}{b} \quad \sigma_{\theta} = \sigma_e = \frac{pR}{2b} \quad \sigma_{\phi} = \sigma_n = -p \quad [\sigma_c \geq \sigma_{\theta} \geq \sigma_{\phi}]$$

Possiamo usare l'anello di Mohr:



- tubo soggetto a coppie torcenti:

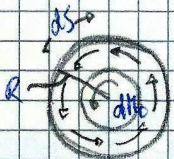


La tensione non necessita di σ_c e σ_e (anche asimmetrica radialmente), ma di σ :

$$\sigma_z = 0 \quad \sigma_c = 0 \quad \sigma \neq 0$$

σ è costante lungo la circonferenza (freccette nel disegno).

Forze, momenti e anello di Mohr:



$$dF = \sigma b d\alpha$$

$$M_0 = \int dM_0 = \int \sigma b R d\alpha =$$

$$= \int \sigma b R d\alpha = \sigma b R \int d\alpha =$$

$$= \sigma b R (2\pi R) =$$

$$= 2 \sigma b \pi R^2 \Rightarrow \sigma = \frac{M_0}{2b\pi R^2}$$

